

氏 名	小杉 千春
学 位 の 種 類	博士（理学）
学位記の番号	甲第252号
学位授与年月日	2023（令和5）年3月20日
学位授与の要件	日本女子大学学位規程第5条第1項該当
学位論文題目	Solvability for the mathematical model representing motions of the elastic curves on the plane
論文審査委員	主査 愛木豊彦 （数理・物性構造科学専攻 教授） 副査 夏井利恵 （数理・物性構造科学専攻 准教授） 藤田 玄 （数理・物性構造科学専攻 准教授） 白川 健 （千葉大学大学院融合理工学府／教育学部 准教授）

氏名 : 小杉 千春

学位論文題目 : Solvability for the mathematical model representing motions of the elastic curves on the plane

論文の内容の要旨

本研究の目的は、温度変化による形状記憶合金の針金の輪の回転運動の解析である。本論文では、針金の輪に働く重力や熱による温度変化を無視して、現象を簡単にした平面上の弾性体の伸縮運動を考察する。

第1章では、形状記憶合金モデルの先行研究を紹介する。例えば、Brokate-Sprekels(1996)は、関数関係にない形状記憶合金における応力と歪みの関係に対し、多項式近似による数学的表現を与えた。また、弾性体の伸縮運動を表す方程式として知られているbeam方程式も紹介する。ここでは、Takeda-Yoshikawa(2012、2013)が考察した減衰を伴う半線形beam方程式に対する数学的結果を述べる。先行研究と本研究の違いは、未知関数の定義域と値域の次元、歪みと応力の非線形性である。その背景について、ここで詳しく述べる。

第2章では、平面上の弾性体の伸縮運動を表す常微分方程式モデルとして、時間に関する2階の非線形常微分方程式系を考える。このモデルでは、応力をその大きさと向きを表す単位ベクトルの積で表すため、方程式は弾性体の長さに関して特異点をもつ項を含む。つまり、線形の応力関数では解の存在と一意性を示すことができない。そこで、歪みを -1 に近づけると負の方向に発散する特異点をもつ非線形の応力関数を用いることで、この常微分方程式系に対する初期値境界値問題の解の存在と一意性を示すことができた。この応力は、弾性体を1点に圧縮すると無限大に発散することを意味し、工学分野においてSimo-Miehe(1992)やHolzapfel(2000)が数値解析的に考察している。特異点をもつ応力関数の導入により、先行研究では得られていなかった歪みに対する下からの評価が得られ、弾性体の長さが0にならないことを数学的に示すことができた。

第3章と第4章では、第2章で扱った常微分方程式系から得られる偏微分方程式をbeam方程式で近似した方程式に対する初期値境界値問題を考える。第4章では、この方程式にエネルギーの時間変化を表す粘弾性の効果を考慮した方程式を扱う。この方程式は、未知関数の導関数に関してLipschitz連続でない非線形項を含むため、特異点をもつ応力関数を用いた可解性の議論は難しく強解の存在も期待できない。そこで、第3章では応力関数を実数直線上で定義されたLipschitz連続関数とすることで弱解の一意存在を示した。特に、一意性は、Ladyzenskaja(1968)らによる共役の方程式を用いる方法によって示すことができた。

第4章では、粘弾性の効果を加えた方程式を扱うが、特異点をもつ応力関数の採用により、歪みに対する下からの評価を得ることができた。この評価をもとに得られる解の一樣評価から、弱解の一意存在だけでなく強解の存在も示すことができた。

第5章では、第2章～第4章で扱った問題に対する今後の研究の方向性を論じる。例えば、常微分方程式モデルでは安定した計算が可能な数値解法の開発、粘弾性の効果を考慮した偏微分方程式モデルでは解の長時間挙動が課題である。また、本論文で取り上げた応力関数と先行研究における応力関数を比較し、応力関数の一般化の必要性も論じる。

氏名 : 小杉千春

学位論文題目 : Solvability for the mathematical model representing motions of the elastic curves on the plane

論文審査の結果の要旨

形状記憶合金に代表される弾性体は環境問題など多様な分野への応用が期待されている。本論文の目的は、そのような弾性体の変形を記述する新たな微分方程式モデルの導出と、その数学的適切性を示すことであり、証明は関数解析学手法に基づいている。新たな微分方程式モデルの解析はそれだけで数学的に十分な価値があり、また、本研究の成果は電子計算機による数値解析に直結する内容も含んでおり、現実事象への応用も視野に入れた意義ある研究である。

第1章では、本研究の動機となった形状記憶合金の変形を記述する数理モデルに対する先行研究の概要、特に、その数理モデルを構成するbeam(梁)方程式と呼ばれる偏微分方程式に関する近年の研究動向を紹介している。それらの研究に対する課題を踏まえ、本論文で考察する常微分方程式モデル、特異性を持つ応力関数を伴う偏微分方程式モデル、リプシッツ連続な応力関数を伴う偏微分方程式という3つの数理モデルを提示し、それぞれのモデルに対する結果の概略を示した。これら3つのモデルでは、いずれも針金や輪ゴムのような弾性体を、定義域を1次元区間、値域を2次元平面とする閉曲線と捉えている。この定義域と値域の次元の違いにより、変形を表す変数として通常用いられる変位ではなく、位置が採用されている。その結果、本研究最大の特色である歪みの非線形性と未知関数に関し微分可能でない点が存在するという特異性が生じている。本論文では、これらの困難を特異点をもつ応力関数の導入により克服しようとしている。第1章では、特異点を持つ応力関数に関連する先行研究やその有効性も示されている。

第2章では、1次元弾性体を分割して得られる各要素に対し、応力だけを考慮した運動法則から導出された連立常微分方程式について考察している。ここで重要なことは、その応力は力の大きさを表すスカラー値をとる応力関数と応力の向きを表す単位ベクトルとの積で定義されている、つまり、応力は2点間の距離を分母に持っているということである。このため応力関数に線形性を課するという古典的な仮定の下では、解の存在を示すことは容易ではない。そこで、物体の微小要素を1点に圧縮しようとした場合、圧縮に反発する極めて大きい応力が働くことを仮定した。言い換えると、歪みを-1に近づけると応力関数は負の方向に発散するということである。このような応力をもつ弾性体は工学的には圧縮性弾性体と呼ばれ、数値解析等の研究成果はあるが微分方程式論立場から考察した結果はない。本論文では、上述の応力関数を伴う連立常微分方程式の解が時間に関して大域的に存在することと解の一意性を証明している。方程式に現れる係数は未知関数に関し局所リプシッツ連続であるため解の局所的存在は自明であるが、特異点の存在が仮定されているため、解の大域的存在は自明ではなく、証明が必要である。本論文ではその証明に加えて、歪みが-1には近づかない、言い換えれば、弾性体の各要素の長さが0にならないことを示している。これは、これまでの弾性体方程式の研究で得られなかった極めて新規的な結果である。さらに、この評価から初期状態が多角形であれば、解は時間に関して周期的であることも証明されている。数値解析に関しては、時間周期性を確かめることを目的とし、構造保存数値解法に基づき構成された数値解についても考察している。構造保存数値解法は陰解法的一种であるためそれを用いて得られる近似解の存在と一意性は証明すべき事項である。本論文では、それらを証明するとともに、近似解が連立常微分方程式の解に収束するときの誤差評価も得ている。同時に、本論文で示された数値計算結果では、精度が高いとされる構造保存数値解法を用いているにも関わらず、数値解の挙動が不安定になるという興味深い現象も報告されている。

第3章では、第2章で議論した常微分方程式における分割数を無限大にすることで偏微分方程式を導出し、さらに数学的に取り扱えるよう解の4階空間微分項を加えたbeam方程式について考察している。本章では、1次元弾性曲線の変形を記述する偏微分方程式モデルの研究

の第一段階として、応力関数を前章で考察した特異点をもつものではなく、実数直線上で定義されたリプシッツ連続性を仮定した関数としている。この仮定により、問題が簡単になったように見受けられるが、前述したように歪みは依然として非線形性と特異性を有しているため、通常の意味での解の存在は期待できない。そこで、微分階数の条件を緩和した弱形式によって解を定義し、その存在と一意性を示している。ここで問題となるのは、解を弱形式で定義したことにより解の正則性が不足し、解の差を試験関数とする通常の方法が適用できないことである。論文提出者は共役の方程式を用いる方法により、この困難を克服し見事に弱解の一意性を示すことに成功した。

第4章では、第1、2章で述べた特異点をもつ応力関数を伴うbeam方程式を扱っている。ただし、第3章とは異なり解の正則性を高める効果をもつ粘性項を方程式に追加している。力学的エネルギーの減衰を表す粘性項の追加は人工的ではないだけでなく、時間無限大での挙動を考察することに意味を持たせている。本章では、beam方程式が持つ空間変数に関する4階微分の項や粘性項から得られる解の評価をもとに、不動点定理を用いて通常の意味での解の存在を示している。常微分方程式とは異なり、偏微分方程式を考察する場合、各点ごとに歪みを下から評価することは容易ではないが、応力関数の特異性を巧みに利用しその評価を示した。また、本章で扱う方程式は4階などの高階の微分項を含んでいるため不動点定理を用いる際に必要な不動空間の設定が複雑となるが、2種類のエネルギー不等式を組み合わせることで解作用素が自己写像となるような不動集合を見つけることに成功している。

第5章では、第1章から第4章までに示した成果に関連する今後の課題が示されている。常微分方程式モデルに対しては、不安定な挙動を示す数値計算を改良する方法の開発等が挙げられている。偏微分方程式モデルに対しては、時間無限大における解の挙動や定理の一般化を課題としている。このように、本研究から派生する課題が数多く示されていることは、本研究の発展性の高さを示している。

以上、論文提出者が見出した定義域を1次元領域とする平面上の弾性体の変形を記述する数理モデルは、数学的に適切であるだけでなく従来のモデルでは示すことができなかった歪みに対する下からの評価が得られるなどの十分な成果が示されているだけでなく、今後の発展の可能性も含めて、微分方程式分野の研究に新しい視点を開いたものと高く評価することができる。よって、審査委員会は論文提出者小杉千春が博士（理学）を受けるのに十分な資格をもつものと認めた。

なお、本論文第1、2、3章は共著論文として公表されているが、論文提出者が主体的に研究を遂行したものであり、共著者よりこれらの論文を博士請求論文として使用することについて承諾を得ている。